

УДК: 519.2

ШВЕЦЬ В. Т.
ОНАХТ (Україна)

Ентропія, енергія і температура виборів

Електорат країни розглядається як конденсована речовина. Запропонована математична модель виборів, аналогічна математичній структурі термодинаміки. Для цього запропоновані вирази для ентропії (інформаційної ентропії електорату або ентропії виборів) і енергії (енергії взаємодії виборців з інформаційним полем кандидатів або енергії виборів). На їх основі отриманий вираз для такої термодинамічної характеристики системи як температура (температура виборів). Запропоновані формули для ентропії виборів і температури виборів застосовані до аналізу виборів у провідних країнах Євросоюзу, Україні та Російській федерації. При цьому ентропія виборів інтерпретується як характеристика свободи виборів, а температура виборів як характеристика інтелектуального рівня електорату.

Вступ

Як сказав видатний німецький філософ Емануїл Кант: «У кожній науці стільки науки – скільки у ній математики». У сфері політики, для аналізу суспільних процесів математика якщо і присутня, то у мінімальному обсязі. Це не більше, ніж числові значення деяких базових параметрів людських спільнот, як то: кількість населення, чисельність збройних сил, кількість виборців, відсоток голосів, поданих за того, чи іншого кандидата тощо. Стосовно фізики це виглядало б так, якби ми цікавились кількістю планет сонячної системи і не намагались з'ясувати їх законів руху у кількісному вимірі.

У роботах [1, 2] електорат країни розглядався як конденсована речовина. Кількість виборців при загально національних виборів вважалась настільки великою, що долі від загальної кількості голосів, поданих за того, чи іншого кандидата (частоти), розглядались як ймовірності для довільного виборця проголосувати за тих же кандидатів. Для опису рівня свободи виборів була запропонована проста математична модель поведінки пересічного виборця, що характеризує рівень його свободи під час голосування за того, чи іншого кандидата в депутати Верховної ради, чи президента (ентропія виборів або індекс свободи виборів). Цей результат мав універсальний характер і застосовний до будь-яких виборів. В основі моделі лежало поняття інформаційної ентропії [3, 4], яке було прямим запозиченням із статистичної фізики і термодинаміки поняття ентропії, як такої [5, 6]. Логічним наступним кроком, з нашої точки зору, є перехід до розгляду інших термодинамічних характеристик системи, таких як внутрішня енергія або енергія виборів і температура або температура виборів.

Розглянемо формулу для інформаційної ентропії.

Ентропія

Нехай проводиться випадковий експеримент з наслідками E_1, E_2, \dots, E_n , що можуть реалізовуватися з ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_n . Тоді інформаційна ентропія - кількість інформації, отримана нами за результатами експерименту, визначається стандартним чином, що у формі прийнятій для теорії інформації [1, 2, 7, 8, 9] має вигляд

$$s = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i).$$

Враховуючи умову нормування для ймовірностей

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

лише $n-1$ ймовірностей, що є параметрами, від яких залежить інформаційна ентропія, є незалежними величинами.

Багато політичних процесів нагадують випадковий експеримент. Зокрема, на нашу думку, таким процесом є вибори різних рівнів. Якщо можливими наслідками цього політичного процесу для окремого виборця вважати перемогу того, чи іншого кандидату, тобто події E_1, E_2, \dots, E_n з ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_n , то для оцінки результатів виборів можна використати попередню формулу, але замість інформаційної ентропії тепер доцільніше вживати термін ентропія виборів. Ця формула тепер визначатиме, яка частина ентропії виборів припадатиме на одного виборця. Так само весь електорат можна розглядати як фізичну систему, що складається, наприклад, з N виборців, E_1, E_2, \dots, E_n можна розглядати як стани системи, у яких вона може знаходитись з ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_n . Тоді остання формула визначає питому ентропію такої фізичної системи.

Введену вище ентропію виборів можна було б також називати індексом свободи вибору пересічного виборця. Ентропія виборів залежить від двох основних факторів: кількості кандидатів і ймовірностей обрання того, чи іншого кандидата. Ентропія виборів при фіксованій кількості кандидатів досягає максимуму, якщо голоси між різними кандидатами розподілилися порівно, тобто $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$. Цю універсальну властивість ентропії застеріг ще Людвіг Едуард Больцман. У цьому разі формула для ентропії виборів матиме вигляд

$$s = \log_2(n).$$

Тобто із зростанням кількості кандидатів ентропія виборів зростає, як логарифм їх кількості. Це є ніщо інше, як знаменита формула Ральфа Гартлі [10], запропонована ним в теорії інформації.

Таким чином, ентропія виборів характеризує рівень невизначеності результатів виборів. Чим більше кандидатів на вибірну посаду і чим рівномірніше розподілені ймовірності перемоги різних кандидатів, тим більшою є ентропія виборів, або індекс свободи виборів. У разі двох кандидатів, що мають рівні шанси на перемогу, тобто у найпростішому політичному випадковому експерименті, для ентропії виборів, так само, як і для інформаційної ентропії, ми отримуємо значення 1. В теорії інформації така кількість інформації називається бітом. У нашому випадку її доцільніше було б назвати інакше, наприклад, фрід – від перших літер англійського слова freedom – свобода. Саме для того, щоб у найпростішому політичному експерименті ми отримали у відповіді одиницю, логарифм у формулі для ентропії виборів доцільно брати за основою два. Зауважимо, що ентропія виборів, так само як і інформаційна ентропія, є нерозмірною величиною, але до її числового значення зручно додавати одиницю вимірювання фрід, тим самим порівнюючи отримане її значення із значенням, що характеризує найпростіший виборчий процес. У статистичній фізиці і термодинаміці ентропія є величиною розмірною.

У Радянському Союзі вибори завжди проводились на безальтернативній основі. Це означає, що одна з ймовірностей, наприклад, $p_1 = 1$, а всі інші дорівнюють нулю. У такому разі формула для ентропії виборів дає нульовий результат.

Зауважимо, що індекс свободи виборів характеризує як свободу вибору окремого виборця, так і всю країну в цілому на момент проведення в ній виборів відповідного рівня. Це твердження випливає з того, що величина p_i є не лише ймовірністю довільного виборця проголосувати за i -го кандидата, але і ймовірністю всієї системи (електорату) знаходитись в i -му стані.

У разі однорідного електорату ймовірності p_i легко отримати за результатами виборів, знаючи відсоток голосів, поданих за i -го кандидата, або кількість виборців m_i , що проголосували за цього ж кандидата у масштабах всієї країни, тобто в якості ймовірностей взяти частоти

$$p_i = m_i / N.$$

Якщо ж електорат складається з m сконсолідованих груп, сформованих за етнічною, професійною, або якоюсь іншою ознакою, то для підвищення точності моделювання доцільно використати формулу повної ймовірності [6]

$$p_i = p(E_i) = \sum_{j=1}^m p(B_j) p(E_i | B_j).$$

В Україні це питання актуальне для більшості етнічних росіян, болгар і угорців що голосують переважно за проросійських кандидатів, для кримських татар, що голосують переважно за проукраїнських кандидатів, для етнічних українців, які голосують непередбачуваним чином тощо. Тут B_1, B_2, \dots, B_m - події, що означають приналежність довільного виборця до відповідної спільноти. Ці події мають бути попарно несумісними, а їх сума має означати вірогідну подію, тобто подію, що обов'язково відбудеться – хоч якось, але виборець проголосує. Використання формули повної ймовірності вимагає, щоб за результатами виборів у кожній зазначеній спільноті окремо дослідили ймовірності голосувань за кожного з кандидатів. У цьому разі

$$p(B_j) = m_j / N,$$

- ймовірність приналежності довільного виборця до B_j спільноти, m_j - чисельність цієї спільноти, $p(E_i | B_j)$ - умовна ймовірність виборця, приналежного j -й спільноті, проголосувати за i -го кандидата. Для знаходження умовних ймовірностей потрібні додаткові дослідження результатів виборів, оскільки традиційно в їх результатах не відображуються приналежності виборців до різноманітних сконсолідованих спільнот.

Внутрішня енергія

Надалі вважатимемо електорат однорідним і таким, що складається з незалежних виборців. У кожного з них перед самими виборами встановлюється емоційний і інтелектуальний зв'язок з певним кандидатом. Енергії цих взаємодій позначимо через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Для довільного виборця такі зв'язки встановлюватимуться з ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_n . Отже, енергія взаємодії довільного виборця з інформаційним полем, створюваним всіма кандидатами,

матиме вигляд зваженого середнього або математичного очікування [7] випадкової величини під назвою енергія

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i.$$

Цей вираз є нічим іншим, як енергією системи не взаємодіючих між собою виборців, що припадає на одного виборця. Вибір між різними кандидатами вимагає від виборця певних емоційних і інтелектуальних зусиль. Ці зусилля тим більші, чим освіченішим є електорат, чим різноманітніші ідеї циркулюють у суспільстві, адже кожен кандидат намагається покласти в основу своєї передвиборчої програми одну або декілька таких ідей. Проблема вибору – одна із найскладніших проблем, з якими стикається людина. Інтелектуально розвинуті люди з задоволення сприймають наявність великого вибору кандидатів. Люди з низьким рівнем інтелекту губляться у різноманітті кандидатів та їх програм. Звичайно вони намагаються уловити переважаючий тренд і приєднатись до нього. Іншими словами, кількість кандидатів і більша або менша рівномірність розподілу голосів між ними дає багату інформацію про електорат, у першу чергу про його інтелектуальний рівень. В термодинаміці розглянута нами енергія називається внутрішньою енергією. Вона є такою ж базовою характеристикою електорату як і ентропія виборів. Її роль для електорату подібна до ролі енергії для будь-якої фізичної системи.

Температура

Як ентропія, так і внутрішня енергія є величинами екстенсивними, тобто їх значення залежать від розмірів системи. Цікаво було б розглянути інтенсивну характеристику фізичної системи або електорату, тобто таку, що не залежить від розмірів системи. Однією з таких величин у термодинаміці і статистичній фізиці є температура. Цілком логічно було б і стосовно виборів розглянути її аналог, який можна було б назвати температурою виборів. Для фізичної системи температура визначає можливість системи перебувати не лише у стані з мінімальною енергією. Температура виборів так само могла б означати можливість голосування не лише за кандидата, яке вимагає найменших емоційних і інтелектуальних зусиль. Відповідно до її означення [12, 13],

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}.$$

Оскільки і ентропія, і внутрішня енергія задані у параметричній формі, а роль параметрів відіграють ймовірності, то ($i = 1, 2, \dots, n-1$)

$$\frac{\partial S}{\partial p_i} = -N \left[\log_2(p_i) - \log_2 \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \right) \right],$$

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = N(\varepsilon_i - \varepsilon_n).$$

Відповідно,

$$\frac{\partial S}{\partial E} = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\log_2(p_i) - \log_2\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right)}{\varepsilon_i - \varepsilon_n},$$

i

$$\frac{1}{T} = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\log_2(p_i) - \log_2\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right)}{\varepsilon_i - \varepsilon_n}.$$

Вираз, отриманий для температури виборів містить два набори параметрів: ймовірності і енергії. Якщо ймовірності можна взяти з аналізу результатів виборів, то звідки взяти енергії? Незалежне їх отримання вимагає величезного масиву інформації про діяльність і ефективність засобів масової інформації, про психологічні особливості громадян даної країни, їх уподобання, їх моральні пріоритети, їх довіру до засобів масової інформації тощо. Нарешті потрібна теорія, яка б всю цю інформацію об'єднала і дозволила обчислити шукані енергії. На жаль, наразі такої теорії немає. Проте є закони математичної статистики, які свідчать про те, що для великих сукупностей приблизно однакових об'єктів мають місце прості статистичні закономірності на кшталт закону великих чисел і центральної граничної теореми. Закон великих чисел ми вже використали замінивши частоти на ймовірності. Тепер використаємо ідею центральної граничної теореми, припустивши, що між ймовірностями і енергіями існує простий статистичний зв'язок. Безумовно, цей зв'язок має описуватись певним статистичним розподілом. Аналіз результатів виборів в Україні [1, 2, 11], які традиційно відрізняються великою кількістю кандидатів і доволі значимим розподілом голосів між ними, дозволяє запропонувати в якості такого розподілу показниковий розподіл, широко використовуваний у математичній статистиці, або його аналог - розподіл Больцмана, що відіграє фундаментальну роль у класичній і квантовій фізичній статистиці [12, 13]

$$p_i = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\tau}\right).$$

Єдиний параметр цього розподілу безпосередньо пов'язаний з математичним очікуванням випадкової величини, що може набувати значень $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Тобто, це ніщо інше як внутрішня енергія

$$\tau = \varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i.$$

Таким чином, за результатами голосування, або попереднього опитування, тобто знаючи кількість голосів, поданих за того, чи іншого кандидата, можна знайти і ентропію, і внутрішню енергію. Система рівнянь для знаходження енергії при відомих ймовірностях, або ймовірностей при відомих енергіях, матиме вигляд

$$p_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

У загальному випадку цю систему рівнянь можна розв'язати лише чисельно, але є два випадки, коли можливе її аналітичне розв'язання.

Перший випадок – це рівномірний розподіл голосів між кандидатами, коли $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$. Із симетрії задачі випливає, що всі енергії також будуть рівними, тобто $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \varepsilon_0$. Тоді система рівнянь зведеться до одного рівняння з розв'язком $\varepsilon_0 = n/e$.

Можна показати, що у разі рівномірного розподілу голосів емоційна і інтелектуальна енергія, витрачена довільним виборцем при фіксованій кількості кандидатів, досягає свого максимального значення і лінійно зростає разом із кількістю кандидатів.

Другий випадок – це, коли всі виборці проголосували за одного кандидата. Нехай це буде перший кандидат. Тоді $p_1 = 1$, а $p_2 = \dots = p_n = 0$. Відповідно $\tau = \varepsilon_1$ і рівняння щодо енергії ε_1 дає очевидний розв'язок $\varepsilon_1 = 1/e$.

Можна показати, що емоційна і інтелектуальна енергія, витрачена довільним виборцем у цьому разі набуває мінімально можливого значення. Якщо ймовірність перемоги першого кандидата прямує до одиниці, то енергія довільного виборця прямує до мінімальної величини $1/e$. Енергії, що відповідають перемозі інших кандидатів при цьому прямують до нескінченості, але повільніше, ніж ймовірності їх перемоги прямують до нуля. Тобто такому електорату стає неймовірно складно оцінити можливості інших кандидатів через брак інтелектуальних здібностей.

Хоча у нашому розгляді енергія виборів є нерозмірною величиною, її цілком можна вимірювати у інший спосіб, характерний для розмірних величин, взявши у якості одиниці енергії її мінімальне можливе значення. Оскільки енергія виборів характеризує у першу чергу інтелектуальну спроможність електорату, то цю одиницю можна було б назвати інтом від перших літер англійського терміну *intelligence quotient* - коефіцієнт інтелекту.

У Радянському союзі емоційні і інтелектуальні зусилля виборців під час виборів при наявності завжди лише одного кандидата на будь-яку виборну посаду якраз дорівнювали одному інту. В умовах же необмеженої особистої свободи ці зусилля у кількісному вимірі не мають верхньої межі.

Запропонований зв'язок між енергіями і ймовірностями дозволяє спростити вираз для температури виборів. Дійсно, оскільки

$$\varepsilon_i - \varepsilon_n = \varepsilon \left[-\log_2(p_i) + \log_2\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right) \right],$$

то виключаючи з виразу для термодинамічної температури енергії, отримаємо

$$T = \varepsilon .$$

Тобто параметр експоненційного розподілу ймовірностей, або внутрішня енергія виборів, є термодинамічною температурою електорату. Остаточний вираз для температури буде таким

$$T = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i .$$

Очевидно, що для температури виборів можна використовувати ту саму одиницю вимірювання, що і для енергії .

У разі рівномірного розподілу ймовірностей перемоги різних кандидатів температура виборів

$$T = n/e ,$$

тобто температура виборів лінійно зростає разом із кількістю кандидатів. У разі абсолютної перемоги одного кандидата

$$T = 1/e .$$

Інші випадки дадуть для температури виборів результат, проміжний між цими двома крайніми його значеннями.

Температура виборів характеризує середню енергію, витрачену пересічним виборцем на здійснення акту вибору. Очевидно, чим вищою є ця середня енергія, тим більшою є здатність даного електорату самостійно думати. Дійсно, проголосувати за кандидата з привабливою програмою і серйозними можливостями її реалізації у разі перемоги, але при скромному фінансуванні його передвиборчої кампанії, може лише думаючий виборець. Тому температуру виборів можна було б назвати і індексом інтелекту електорату.

Чому більшовики після приходу до влади у Російській імперії в основу своєї влади поклали вибори з одним кандидатом? Інтелектуальний рівень суспільства після 1917 року різко знизився. Тому саме такі вибори відповідали інтелектуальному рівню виборців тих часів. Інтелігенція, сформована до 1917 року була або цілеспрямовано винищена, або емігрувала з країни. Для формування нової інтелігенції були потрібні принаймні два покоління. Цікаво, що радянська влада протрималась після 1917 року якраз ці два покоління. Радянська епоха не була узурпацією влади міфічними більшовиками. Більшовики і були представниками найширших верств тогочасного люду – малоосвіченого і інтелектуально неспроможного.

Зауважимо, що максимум температури виборів, або індексу інтелекту електорату досягається за тих же результатів голосування, що і максимум ентропії виборів, або індексу свободи виборів. Тобто, свобода і інтелект – дві напружані пов'язані між собою субстанції.

Ще однією цікавою обставиною є той факт, що мінімальному – нульовому рівню індексу свободи відповідає мінімальний можливий індексу інтелекту. У термодинаміці така відповідність між ентропією і температурою становить зміст третього початку термодинаміки, правда там мінімальна температура дорівнює нулю.

Отже, енергія виборів є первинною характеристикою, а отримані кандидатами відсотки голосів – вторинною. Проте після виборів за отриманими результатами голосування можна легко знайти і оцінити енергії в рамках нашої моделі і, відповідно з'ясувати, якими були вибори з точки зору їх свободи і інтелектуального рівня. Якщо ж є можливість до виборів знайти відповідні енергії, то в великою ймовірністю можна спрогнозувати результати самих виборів. Актуальними є обидві задачі, проте перша легше піддається розв'язанню.

Вибори в Україні, Росії і країнах Євросоюзу

Застосуємо запропоновані нами формули для оцінки індексу свободи виборів і індексу інтелекту електорату у провідних країнах Євросоюзу, а також в Україні і Росії. Для простоти візьмемо лише останні вибори у країнах Європи. Обмежимося аналізом лише першого туру там, де вибори проводились у два тури, та розглядатимемо систему не більше десяти рівнянь, що визначають зв'язок між енергіями і ймовірностями. Якщо кандидатів є декілька десятків, то, звичайно, більшість кандидатів мають долю отриманих голосів, що становить долі відсотка від їх загальної кількості. Такий результат практично не впливає на числові значення характеристик виборів, що розглядаються. Для парламентських виборів матимемо наступний результат.



Рис. 1.

З наведеної діаграми видно, що для всіх розглянутих країн, а це провідні країни Євросоюзу, характерні високі значення індексу свободи виборів. Різниця між найбільшим і найменшим значеннями цього індексу порівняно невелика. Україна знаходиться якраз всередині цього інтервалу. Росія ж у цьому переліку країн посідає останнє місце із помітним відривом від країни Євросоюзу з найменшим значенням індексу свободи виборів – Великої Британії.

Не в усіх країнах Євросоюзу президенти обираються шляхом прямих і загальних виборів. Серед вже розглянутих країн Євросоюзу таких країн є лише чотири. Відповідна діаграма щодо президентських виборів має наступний вигляд.

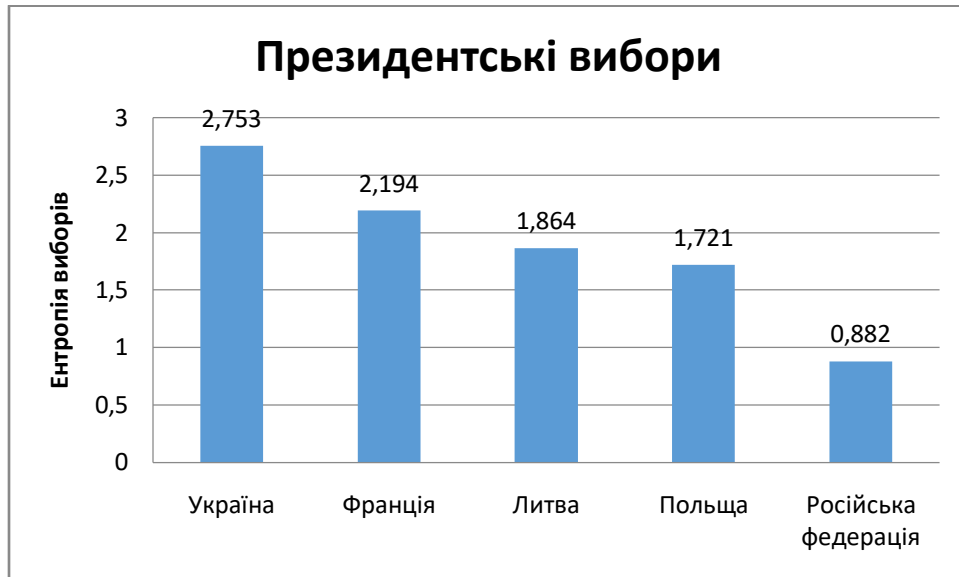


Рис. 2.

Тут уже безперечним лідером є Україна, причому з великим відривом від решти країн. Інші країни Євросоюзу знову демонструють невелику розкиданість відповідних значень індексу свободи виборів, рівень якого в цілому є доволі високим. На останньому місті за значенням індексу свободи виборів знову опинилась Росія.

Зазначимо, що необхідні для побудови діаграм данні доступні з інтернету [14, 29]. Зауважимо, що індекс свободи виборів є випадковою величиною і змінюється із часом. Часову динаміку цієї характеристики для України і Російської федерації досліджено у статтях [1, 2, 11]. Так само він різний для різних варіантів виборів. Проте ці зміни є відносно малими і не зачіпають якісного характеру результату.

Результати щодо індексу інтелекту електорату добре корелюють з результатами щодо індексу свободи виборів. Точніше, ентропія виборів монотонно змінюється з температурою виборів. Цей факт має місце для фізичних систем і є цілком логічним для електорату – лише розумна людина може бути вільною. Людина з низьким рівнем інтелекту в інтересах виживання повинна підпорядковуватись чужій волі, спрямованій на це виживання.

Результати щодо індексу інтелекту електорату на парламентських виборах наведені на наступній діаграмі.

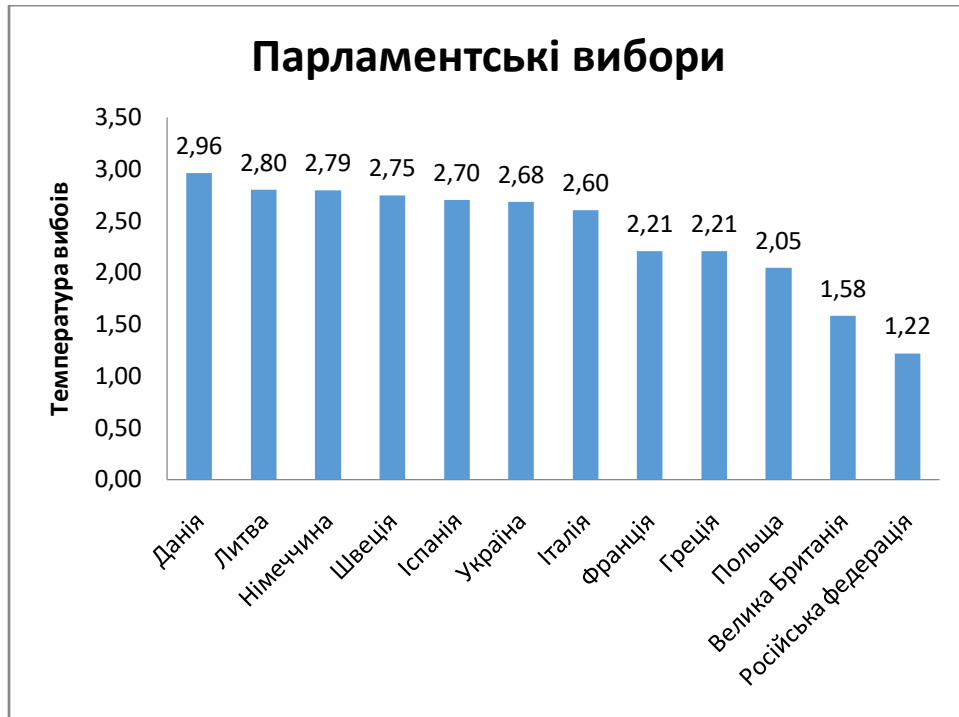


Рис. 3.

Безперечними лідерами щодо індексу інтелекту електорату тут є країни північної Європи, населені переважно германськими народами. Україна і Іспанія з невеликим відривом від першої групи країн займають центральну частину діаграми. Країни південної Європи і Польща, також з невеликим відривом, ідуть слідом за ними. Дещо неочікуваним є результат для Великої Британії з її відносно низьким значенням температури виборів. Нарешті, цілком очікуваним є результат для Російської федерації, що займає останню позицію діаграми.

На президентських виборах, результати яких наведені на наступній діаграмі, відбувається зміна лідерів.

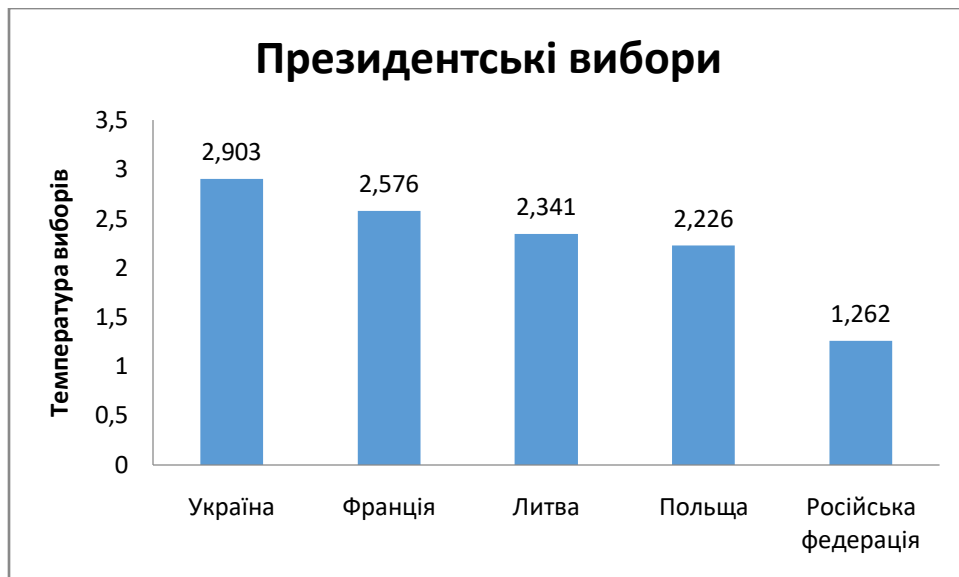


Рис. 4.

Тут на перше місце із значним відривом від решти країн виходить Україна. У радянській імперії, перша особа у державі відігравала унікальну за своїми повноваженнями роль. Тому увага до таких виборів в Україні виявляється традиційно вищою, ніж до парламентських, оскільки ера парламентаризму започаткувалась відносно недавно і ще не зайняла у свідомості українських виборів належного місця. Останнє місце у Російській федерації з великим відривом від інших країн також є цілком зрозумілим.

Висновки

1. Між індексом свободи виборів і індексом інтелекту електорату існує чітка кореляція. Вищому значення індексу інтелекту відповідає і вище значення індексу свободи.

2. Для країн Євросоюзу характерні високі значення як індексу свободи виборів, так і індексу інтелекту електорату. Так само високі значення цих індексів характерні і для України. Для Російської федерації вони є вкрай низькими.

3. Сама можливість помітити найдрібніші деталі як президентських, так і парламентських виборів у різних країнах на рівні чисел свідчить, на нашу думку, про те, що формули, запропоновані авторами для аналізу виборів в термінах ентропії, енергії і температури виборів, є ефективним інструментом кількісного дослідження даного політичного процесу. Ми впевнені, що подібний підхід можна застосувати для кількісного аналізу і інших аспектів політичного життя різних країн.

4. Проблеми сучасної України, на нашу думку, пов'язані не з низьким рівнем духовного і інтелектуального потенціалу української нації, а з низьким рівнем національної свідомості українців, що часто перебуває у зародковому стані. Прогрес у державотворенні потребує належного виховання і підростаючого покоління, і старшої за віком частини українського суспільства.

Автор висловлює щирі вдячність Ярославу Іллічу Лепіху за плідне обговорення результатів роботи і стимулюючі обговорення у процесі її виконання.

Література:

1. Швець В. Т. Ентропія і вибори / Світогляд. – 2019. - № 6. – С. 56 – 61.
2. Швець В. Т. Формула свободи / Бінтел. – 2019. - № 3. – С. 50 -54.
3. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication / Bell System Technical Journal. - 1948. - V. 27. – P. С. 379-423, 623–656.
4. Shannon C.E. Communication in the presence of noise / Proc. Institute of Radio Engineers, Jan. 1949. - V. 37, № 1. - P. 10-21.
5. *Больцман Л.* Очерки по методологии физики. — Москва, 1929, 136 с.
6. *Больцман Л.* Кинетическая теория материи. — Москва, 1939, 110 с.
7. Швець В. Т. Теорія ймовірностей і математична статистика. - Одеса: ВМВ, 2014, 200 с.
8. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – Москва: Наука, 1971, 416 с.
9. Якібчук П.М., Клим М. М. Молекулярна фізика. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2015, 584 с.

10. Hartley, R.V.L. A Wave Mechanism of Quantum Phenomena / Physical Review – 1929. - V. 33, P. 289-297..
11. Швець В. Т. Інформаційна ентропія і свобода вибору / Conference proceeding. Part 1. XII International scientific and practical conference: Information technologies and automation – 2019. October 17-18, Odesa, - 22 – 25.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая фізика. – Москва: 1974. – 584 с.
13. Свідзинський Анатолій. Математичні методи теоретичної фізики. Том. 1. Київ: Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, 2009, 396 с.
14. https://en.wikipedia.org/wiki/2019_Polish_parliamentary_election
15. https://en.wikipedia.org/wiki/2017_United_Kingdom_general_election
16. https://en.wikipedia.org/wiki/2017_French_legislative_election
17. https://en.wikipedia.org/wiki/2019_Lithuanian_presidential_election
18. https://en.wikipedia.org/wiki/2016_Lithuanian_parliamentary_election
19. https://en.wikipedia.org/wiki/2017_French_presidential_election
20. https://en.wikipedia.org/wiki/2017_German_federal_election
21. https://en.wikipedia.org/wiki/April_2019_Spanish_general_election
22. https://en.wikipedia.org/wiki/2019_Greek_legislative_election
23. https://en.wikipedia.org/wiki/2018_Russian_presidential_election
24. https://en.wikipedia.org/wiki/2016_Russian_legislative_election
25. https://en.wikipedia.org/wiki/2019_Ukrainian_parliamentary_election
26. https://en.wikipedia.org/wiki/2019_Ukrainian_presidential_election
27. https://en.wikipedia.org/wiki/2015_Polish_presidential_election
28. https://en.wikipedia.org/wiki/2019_Danish_general_election
29. https://en.wikipedia.org/wiki/2018_Italian_general_election